Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
— 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.
— 203 : Utilisation de la notion de compacité.
— 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.
— 234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

Posons pour $h \in \mathbb{R}^N, x \in \mathbb{R}^N$, $\tau_h f(x) = f(x-h)$.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, une partie bornée de A de $L^p(\Omega, \mathbb{K}), 1 \leq p < +\infty$ vérifiant :*

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall f \in A, \forall ||h|| \geq \delta, ||\tau_h \tilde{f} - \tilde{f}||_p \leq \varepsilon$
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B \subset \Omega$ un borélien borné tel que*

$$\forall f \in A, \left(\int_{\Omega \setminus B} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

avec $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ le prolongement par 0 de $f : \Omega \to \mathbb{K}$ en dehors de Ω, alors A est une partie relativement compacte de $L^p(\Omega, \mathbb{K})$.

Preuve : Soit $K = \overline{B}$, K une partie compacte de $\mathbb{R}^N$, nous allons régulariser par convolution puis appliquer le théorème d'Ascoli.
Soit $\varepsilon > 0, \delta = \delta(\varepsilon)$ tel 1).
Soit (ρ_n) une approximation de l'unité de $\mathbb{R}^N$. Posons $\tilde{f}_n = \tilde{f} \star \rho_n$.

Étape 1 : Montrons que $\forall f \in A, n > \frac{1}{\delta}, ||\tilde{f}_n - \tilde{f}||_p \leq \varepsilon$

Soit $x \in \Omega, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)| \rho_n(y) \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)| \rho_n(y)^{\frac{1}{p}} \rho_n(y)^{1-\frac{1}{p}} \mathrm{d}y \end{aligned}$$

Comme $\rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^N), |\tilde{f}(x-\cdot) - \tilde{f}(x)|\rho_n^{\frac{1}{p}}| \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $\rho_n \in L^q(\mathbb{R}^N)$. D'après l'inégalité de Hölder :

$$|\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)|^p \rho_n(y) \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)^{q(1-\frac{1}{p})} \right)^{\frac{1}{q}}$$

avec $q = \frac{p}{p-1}$ le conjugué de p donc $q(1-\frac{1}{p}) = 1$ et (ρ_n) est une identité approchée.

$$|\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}(x)|^p \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)|^p \rho_n(y)\mathrm{d}y\right)$$

En intégrant sur Ω, par théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}(x)|^p \,\mathrm{d}x &\leq \int_\Omega \int_{\mathrm{B}(0,\frac{1}{n})} |\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)|^p \rho_n(y)\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathrm{B}(0,\frac{1}{n})} \rho_n(y) \int_\Omega |\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}(x)|^p \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathrm{B}(0,\frac{1}{n})} \rho_n(y) ||\tau_y \tilde{f} - \tilde{f}||_p^p \mathrm{d}y\end{aligned}$$

Donc pour $n > \frac{1}{\delta}$, on a $||\tilde{f}_n - \tilde{f}|_p < \varepsilon$ pour tout $f \in A$ par hypothèse.

Étape 2 : Montrons que $C_n := \{\tilde{f}_{n|K}, f \in A\}$ vérifie les hypothèses du théorème d'Ascoli

On a $C_n \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{K})$ et $\forall x \in K, |\tilde{f}_n(x)| \leq ||f||_p ||\rho_n||_q$ donc C_n est une partie bornée de $\mathcal{C}(K, \mathbb{K})$. De plus, pour $x, y \in K$,

$$\begin{aligned}|\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}_n(y)| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{f}(x-z) - \tilde{f}(y-z)|^p \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} ||\rho_n||_q \\ &\leq ||\rho_n||_q ||\tau_{x-y}\tilde{f} - \tilde{f}||_p\end{aligned}$$

Donc pour $||x-y|| \leq \delta$, on a $|\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}_n(y)| \leq \varepsilon ||\rho_n||_q$ donc C_n est une partie équicontinue.
D'après le théorème d'Ascoli, C_n est précompact donc il existe un ensemble fini I et une famille de fonctions $(f_i)_{i\in I}$ de A telle que

$$\forall f \in A, \exists i \in I, \sup_{x\in K} |\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}_{i,n}(x)| \leq \varepsilon \mu(K)^{-\frac{1}{p}}$$

Étape 3 : On se ramène à $L^p(\Omega, \mathbb{K})$

Pour $f \in A$, $n > \frac{1}{\delta}$

$$\begin{aligned}||f - f_i||_p &\leq \left(\int_\Omega |f(x) - f_i(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \underbrace{\left(\int_{\Omega\setminus K} |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}}_{\leq\varepsilon} + \underbrace{\left(\int_{\Omega\setminus K} |f_i(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}}_{\leq\varepsilon} + \left(\int_{\Omega\cap K} |f(x) - f_i(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Or, $|f - f_i|\mathbb{1}_{\Omega\cap K} \leq (|f - f_i| + |f_i - f_{i,n}| + |f_n - f_{i,n}|)\mathbb{1}_{\Omega\cap K}$. D'où

$$\left(\int_{\Omega\cap K} |f(x) - f_i(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq ||\tilde{f} - \tilde{f}_n||_p + ||\tilde{f}_n - \tilde{f}_{i,n}||_p + \left(\int_{\Omega\cap K} |\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}_{i,n}(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

et

$$\left(\int_{\Omega\cap K} |\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}_{i,n}(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega\cap K} (\varepsilon\mu(K)^{-\frac{1}{p}})^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

d'où $||f - f_i||_p \leq 5\varepsilon$ donc les $\mathrm{B}(f_i, 5\varepsilon)$ recouvrent A donc A est précompact. Comme L^p est complet, A est relativement compact. $\square$

Références

[1] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. Masson, 1987.

[2] Francis Hirsch et Gilles Lacombe. *Éléments d'analyse fonctionnelle*. Dunod, 1997.